

第2章 | 複素数と方程式



第1節 複素数と2次方程式の解

1 複素数とその計算

まとめ

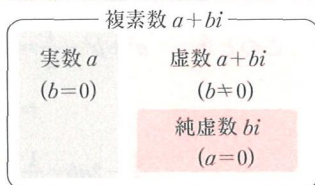
1 虚数単位 i

2乗すると -1 になる新しい数を1つ考え、これを文字 i で表す。
すなわち、 $i^2 = -1$ とする。この i を虚数単位という。

2 複素数

虚数単位 i と2つの実数 a, b を用いて $a+bi$ の形に表される数を考える。
この数を複素数という。複素数 $a+bi$ で、 a を実部、 b を虚部という。

- 3 虚数・純虚数** 複素数 $a+bi$ について、
 $b=0$ のときの複素数 $a+0i$ は実数 a を表すものとする。
 $b \neq 0$ のときの複素数 $a+bi$ を虚数といい、とくに、 $a=0$ であるときの虚数 $0+bi$ は bi と表し、これを純虚数という。



4 複素数の相等

2つの複素数が等しいのは、実部、虚部が、それぞれ一致する場合とする。
すなわち、次のように定める。

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

$$\text{とくに } a+bi=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

注意 複素数 $a+bi, c+di$ などでは、文字 a, b, c, d は実数とする。

5 共役な複素数

2つの複素数 $a+bi, a-bi$ を、互いに共役な複素数という。実数 a と共役な複素数は、 a 自身である。

6 複素数の四則計算

加法 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乗法 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

除法 $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

7 複素数の性質

- 1 2つの複素数の和、差、積、商は常に複素数である。
 2 実数の場合と同様に、複素数 α, β に対しても次が成り立つ。

$$\alpha\beta=0 \implies \alpha=0 \text{ または } \beta=0$$

なお、虚数については、大小関係や正、負は考えない。

8 $\sqrt{-a}$ の定義

$a>0$ のときの記号 $\sqrt{-a}$ の意味を次のように定める。

$$a>0 \text{ のとき } \sqrt{-a}=\sqrt{a}i \quad \text{とくに } \sqrt{-1}=i$$

9 負の数の平方根

$a>0$ のとき、 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}$ すなわち $\pm\sqrt{a}i$

A 複素数

教 p.41

練習

1

次の複素数の実部と虚部をいえ。

$$(1) -3+5i \quad (2) \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \quad (3) 1 \quad (4) -i$$

指針 複素数の実部、虚部 複素数 $a+bi$ では、実部は a 、虚部は b である。(2) は、まず、 $a+bi$ の形にする。

$$(3) 1=1+0i \quad (4) -i=0+(-1)i \text{ と考える。}$$

解答 (1) 実部は -3 、虚部は 5 答

$$(2) \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$\text{実部は } -\frac{1}{2}, \text{ 虚部は } -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 答}$$

$$(3) 1=1+0i \quad \text{実部は } 1, \text{ 虚部は } 0 \text{ 答}$$

$$(4) -i=0+(-1)i \quad \text{実部は } 0, \text{ 虚部は } -1 \text{ 答}$$

練習

2

次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

$$(1) (x-2y)+(x+3)i=2-i \quad (2) (2x+y)+(x-y+3)i=0$$

指針 複素数の相等 a, b, c, d が実数のとき

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

$$\text{とくに } a+bi=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

解答 (1) x, y が実数であるから、 $x-2y, x+3$ は実数である。

$$\text{よって } x-2y=2, x+3=-1$$

$$\text{これを解いて } x=-4, y=-3 \text{ 答}$$

(2) x, y が実数であるから, $2x+y, x-y+3$ は実数である。

よって $2x+y=0, x-y+3=0$

これを解いて $x=-1, y=2$ 答

B 複素数の計算

練習 3

次の式を計算せよ。

(1) $(2+3i)+(4+i)$

(2) $(-1+2i)+(3-4i)$

(3) $(6+4i)-(3+2i)$

(4) $(2-3i)-(4-2i)$

教 p.42

指針 複素数の加法・減法 虚数単位の i を文字と考え、同類項をまとめる要領で計算する。

解答 (1) $(2+3i)+(4+i)=(2+4)+(3+1)i$
 $=6+4i$ 答

(2) $(-1+2i)+(3-4i)=(-1+3)+(2-4)i$
 $=2-2i$ 答

(3) $(6+4i)-(3+2i)=(6-3)+(4-2)i$
 $=3+2i$ 答

(4) $(2-3i)-(4-2i)=(2-4)+(-3+2)i$
 $=-2-i$ 答

練習 4

次の式を計算せよ。

(1) $(1+2i)(4+3i)$

(2) $(2-i)(3+4i)$

(3) $(2+3i)^2$

(4) $(3+4i)(3-4i)$

教 p.42

指針 複素数の乗法 文字 i の式と考えて展開する。

ただし, i^2 が出てくればそれを -1 におき換えて整理する。

解答 (1) $(1+2i)(4+3i)=4+3i+8i+6i^2=\{4+6(-1)\}+(3+8)i$
 $=-2+11i$ 答

(2) $(2-i)(3+4i)=6+8i-3i-4i^2=\{6-4(-1)\}+(8-3)i$
 $=10+5i$ 答

(3) $(2+3i)^2=2^2+2\cdot 2\cdot 3i+(3i)^2=4+12i+9i^2$
 $=\{4+9(-1)\}+12i=-5+12i$ 答

(4) $(3+4i)(3-4i)=3^2-(4i)^2=9-16i^2$
 $=9-16(-1)=25$ 答

練習
5

次の複素数と共役な複素数をいえ。

- (1) $2+3i$ (2) $1-i$ (3) $\sqrt{3}i$
 (4) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (5) -4

指針 共役な複素数 2つの複素数 $a+bi$, $a-bi$ は互いに共役な複素数である。すなわち、実部はそのままにして、虚部の符号を変えることにより、もとの複素数と共役な複素数をつくることができる。

また、実数 a と共役な複素数は a 自身である。

- 解答** (1) $2-3i$ 答
 (2) $1+i$ 答
 (3) $-\sqrt{3}i$ 答
 (4) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから、共役な複素数は
 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ よって $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 答
 (5) -4 答

練習
6

次の式を計算せよ。

- (1) $\frac{1+2i}{2+3i}$ (2) $\frac{1-i}{1+i}$ (3) $\frac{5i}{2-i}$

指針 複素数の除法 分母と共役な複素数を分母と分子に掛けて、分母を実数にしてから計算する。

- 解答** (1) $\frac{1+2i}{2+3i} = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i+4i-6i^2}{2^2-(3i)^2}$
 $= \frac{2-6(-1)+(-3+4)i}{4-9(-1)} = \frac{8+i}{4-9(-1)}$
 $= \frac{8+i}{13} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$ 答
 (2) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1^2-2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{1-2i-1}{1-(-1)}$
 $= \frac{-2i}{2} = -i$ 答
 (3) $\frac{5i}{2-i} = \frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10i+5i^2}{2^2-i^2}$
 $= \frac{10i+5(-1)}{4-(-1)} = \frac{-5+10i}{5}$
 $= -1+2i$ 答

分母を実数にする方法は分母の有理化と似ているね。



C 負の数の平方根

教 p.44

練習

7

次の数を i を用いて表せ。

(1) $\sqrt{-5}$

(2) $\sqrt{-9}$

(3) -18 の平方根

指針 負の数の平方根 $a > 0$ のとき, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ であることを用いる。(3) -18 の平方根は 2 つあり, $\pm\sqrt{-18}$ ($\sqrt{-18}$ と $-\sqrt{-18}$) である。解答 (1) $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$ 答

(2) $\sqrt{-9} = \sqrt{9}i = 3i$ 答

(3) -18 の平方根は

$$\pm\sqrt{-18} = \pm\sqrt{18}i = \pm 3\sqrt{2}i$$
 答

練習

8

次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}$

(2) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}$

(3) $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$

(4) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}$

教 p.44

指針 負の数の平方根の計算 負の数の平方根を含む計算を行うときは, まず次の変形を行う。

$$a > 0 \text{ のとき } \sqrt{-a} = \sqrt{a}i \text{ とくに } \sqrt{-1} = i$$

解答 (1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6} = \sqrt{2}i \times \sqrt{6}i = \sqrt{2}\sqrt{6}i^2$
 $= \sqrt{12}(-1) = -2\sqrt{3}$ 答

(2) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{4}i} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 答

(3) $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}i}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}} = 2i$ 答

(4) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}i} = \frac{3}{i} = \frac{3i}{i^2} = -3i$ 答

補足 (1), (4) より, $\sqrt{-2}\sqrt{-6} = -2\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}} = -3i$ であるが,

$$\sqrt{(-2)(-6)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{\frac{45}{-5}} = \sqrt{-9} = 3i \text{ であるから,}$$

$$\sqrt{-2}\sqrt{-6} \neq \sqrt{(-2)(-6)}, \quad \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}} \neq \sqrt{\frac{45}{-5}}$$

である。一般には, 次のようになる。

$$a < 0, b < 0 \text{ のとき } \sqrt{a}\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$$

$$a > 0, b < 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \neq \sqrt{\frac{a}{b}}$$

2 2次方程式の解

まとめ

2章

複素数と方程式

1 2次方程式 $x^2=k$ の解

k が実数のとき、複素数の範囲では、2次方程式 $x^2=k$ は k の符号に関係なく常に解をもち、その解は $x=\pm\sqrt{k}$

2 2次方程式の解

実数係数の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は、解を複素数の範囲で考えると、 b^2-4ac の符号に関係なく常に解をもつ。

3 2次方程式の解の公式

$$2\text{次方程式 } ax^2+bx+c=0 \text{ の解は } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$2\text{次方程式 } ax^2+2b'x+c=0 \text{ の解は } x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

4 実数解と虚数解

方程式の解のうち、実数であるものを 実数解、虚数であるものを 虚数解という。複素数の範囲で、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は常に解をもち、その解の種類は b^2-4ac すなわち 判別式 の符号によって判別できる。

5 2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると

$$D>0 \iff \text{異なる2つの実数解をもつ}$$

$$D=0 \iff \text{重解をもつ}$$

$$D<0 \iff \text{異なる2つの虚数解をもつ}$$

注意 重解は実数解であるから、次のことが成り立つ。

$$D\geq 0 \iff 2\text{次方程式が実数解をもつ}$$

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ では、 $D=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$ であるから、 D の代わりに $\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

A 2次方程式の解

教 p.45

練習
9

次の2次方程式を解け。

(1) $x^2=-1$

(2) $x^2=-8$

指針 2次方程式 $x^2=k$ の解 複素数の範囲では k の符号に関係なく常に解をもち、その解は $x=\pm\sqrt{k}$ である。

解答 (1) $x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$ **答**

(2) $x=\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm 2\sqrt{2}i$ **答**

練習
10

次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + 3x + 4 = 0$

(2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

(3) $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$

(4) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$

指針 2次方程式の解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解は } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ax^2 + 2b'x + c = 0 \text{ の解は } x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \dots\dots \textcircled{2}$$

(2), (4) では, ② を利用するとよい。

解答 (1) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$
 $= \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}$ 答

(2) $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \cdot 2}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{-2}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$ 答

(3) $x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}$
 $= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$ 答

(4) $x = \frac{-(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 4}}{1} = \sqrt{3} \pm \sqrt{-1} = \sqrt{3} \pm i$ 答

【参考】(2)や(4)を解く際に, ①を使うのと②を使うのとでは, 計算のスピードが違ってくるから, ②を使うことに慣れておこう。

B 2次方程式の解の種類の判別

練習
11

次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

(1) $x^2 + 5x + 5 = 0$

(2) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

(3) $-4x^2 + x - 1 = 0$

(4) $3x^2 - 4\sqrt{6}x + 8 = 0$

指針 解の種類の判別 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とすると

 $D > 0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ $D = 0 \iff$ 重解をもつ $D < 0 \iff$ 異なる2つの虚数解をもつ

なお, (2), (4) は $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の形であるから, $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$ の符号を調べるとよい。

解答 2次方程式の判別式を D とする。

$$(1) D=5^2-4\cdot 1\cdot 5=5>0$$

よって、この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ。 答

$$(2) \frac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-1\cdot 2=1>0$$

よって、この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ。 答

$$(3) D=1^2-4(-4)(-1)=-15<0$$

よって、この2次方程式は異なる2つの虚数解をもつ。 答

$$(4) \frac{D}{4}=(-2\sqrt{6})^2-3\cdot 8=24-24=0$$

よって、この2次方程式は重解をもつ。 答

練習 12

教 p.47

m は定数とする。次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

$$x^2+(m+1)x+1=0$$

指針 解の種類判別 $D>0$, $D=0$, $D<0$ となる m の値または範囲をそれぞれ求め、場合分けをして示す。

解答 この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot 1=m^2+2m-3=(m+3)(m-1)$$

よって、2次方程式の解は次のようになる。

$D>0$ すなわち

$m<-3$, $1<m$ のとき 異なる2つの実数解

$D=0$ すなわち

$m=-3$, 1 のとき 重解

$D<0$ すなわち

$-3<m<1$ のとき 異なる2つの虚数解 答

3 解と係数の関係

まとめ

1 解と係数の関係

2次方程式の2つの解の和と積は、方程式の係数を用いて表すことができる。

これを、2次方程式の 解と係数の関係 という。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α , β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2 2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α , β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

係数が実数である2次式は、複素数の範囲で常に1次式の積に因数分解できる。

3 2数 α , β を解とする2次方程式

2数 α , β を解とする2次方程式の1つは

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

← 和が p , 積が q である

2数 α , β は $x^2-px+q=0$

の解であるといえる。

4 2次方程式の実数解の符号

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解 α , β と判別式 D について、次のことが成り立つ。

α , β は異なる2つの正の解 $\iff D>0$ で, $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

α , β は異なる2つの負の解 $\iff D>0$ で, $\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

α , β は符号の異なる解 $\iff \alpha\beta<0$

補足 解と係数の関係により, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ であるから, $\alpha\beta<0$ ならば $ac<0$ である。

よって, $\alpha\beta<0$ のとき $D=b^2-4ac>0$ は成り立っている。

A 解と係数の関係

教 p.48

練習
13

次の2次方程式について, 2つの解の和と積を求めよ。

(1) $x^2+4x+2=0$

(2) $3x^2-6x-4=0$

指針 解と係数の関係 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α , β とすると
解の和, 積はそれぞれ次のようになる。

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

解答 2次方程式の2つの解を α , β とする。

(1) $a=1$, $b=4$, $c=2$ であるから

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{4}{1}=-4, \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2 \quad \text{答 和 } -4, \text{ 積 } 2$$

(2) $a=3$, $b=-6$, $c=-4$ であるから

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{3}=2, \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3} \quad \text{答 和 } 2, \text{ 積 } -\frac{4}{3}$$

とくに, 解の和の符号を
間違えないように
注意しよう。



練習
14

2 次方程式 $x^2+3x-1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$ (3) $(\alpha-\beta)^2$

指針 解と係数の関係・式の値

- (1) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ から、 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ であることを利用する。
 (2) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ から、 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ であることを利用する。
 (3) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$ と (1) の結果を利用する。

解答 解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{1}=-3, \quad \alpha\beta=\frac{-1}{1}=-1$$

$$(1) \quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ =(-3)^2-2(-1)=11 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ =(-3)^3-3(-1)(-3)=-36 \quad \text{答}$$

$$(3) \quad (\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \\ =11-2(-1)=13 \quad \text{答}$$

←(1) の結果を利用

別解 (2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
 $=(-3)\{11-(-1)\}=-36 \quad \text{答}$

←(1) の結果を利用

$$(3) \quad (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ =(-3)^2-4(-1)=13 \quad \text{答}$$

練習
15

2 次方程式 $x^2+5x+m=0$ の 2 つの解が次の条件を満たすとき、定数 m の値と 2 つの解を、それぞれ求めよ。

- (1) 1 つの解が他の解の 4 倍である。
 (2) 2 つの解の差が 1 である。

指針 解の係数の関係・解の条件 (1) では 2 つの解を $\alpha, 4\alpha$, (2) では 2 つの解を $\alpha, \alpha+1$ とおき、解と係数の関係を使って、 α, m についての連立方程式を作る。

解答 (1) 2 つの解は、 $\alpha, 4\alpha$ と表すことができる。

解と係数の関係から

$$\alpha+4\alpha=-\frac{5}{1}=-5, \quad \alpha \cdot 4\alpha=\frac{m}{1}=m$$

$$\text{すなわち} \quad 5\alpha=-5, \quad 4\alpha^2=m$$

よって、1つの解 α は $\alpha = -1$

このとき $m = 4\alpha^2 = 4(-1)^2 = 4$

また、他の解 4α は $4\alpha = 4(-1) = -4$

答 $m = 4$ 、2つの解は -1 、 -4

(2) 2つの解は、 α 、 $\alpha+1$ と表すことができる。

解と係数の関係から

$$\alpha + (\alpha + 1) = -5, \quad \alpha(\alpha + 1) = m$$

$$\text{すなわち } 2\alpha + 1 = -5, \quad \alpha(\alpha + 1) = m$$

よって、1つの解 α は $\alpha = -3$

このとき $m = \alpha(\alpha + 1) = -3(-3 + 1) = 6$

また、他の解 $\alpha + 1$ は $\alpha + 1 = -3 + 1 = -2$

答 $m = 6$ 、2つの解は -3 、 -2

補足 (2) 2つの解を、 α 、 $\alpha - 1$ と表して求めてもよい。



深める

教 p.49

教科書の例題4において、 $(\alpha - \beta)^2$ の値を求めることにより、 $\alpha - \beta$ の値を求めてみよう。

また、このとき $\alpha - \beta$ の値が1つに定まらない理由を考えてみよう。

指針 解と係数の関係・式の値 まず、 $(\alpha - \beta)^2$ の値を

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - 4\alpha\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \end{aligned}$$

を使って求め、その平方根として $\alpha - \beta$ の値を求める。次に、方程式を実際に解き、どちらを α 、 β に設定するかによって値が異なることを示す。

解答 $\alpha - \beta$ の値

解と係数の関係から $\alpha + \beta = 4$ 、 $\alpha\beta = 5$

$$\begin{aligned} \text{よって } (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 \end{aligned}$$

したがって $\alpha - \beta = \pm 2i$ **答**

$\alpha - \beta$ の値が1つに定まらない理由

(例) 2次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ を解くと

$$x = 2 \pm i$$

ここで

$$\alpha = 2 + i, \beta = 2 - i \text{ のとき } \alpha - \beta = 2i$$

$$\alpha = 2 - i, \beta = 2 + i \text{ のとき } \alpha - \beta = -2i$$

のようにどちらを α 、どちらを β とするかにより値が異なるから、 $\alpha - \beta$ の値は1つに定まらない。 **終**

B 2 次式の因数分解

教 p.50

練習
16

次の 2 次式を、複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $x^2 - 3x - 2$ (2) $2x^2 - 2x - 3$ (3) $x^2 + 4x + 6$

指針 2 次式の因数分解 2 次式 $ax^2 + bx + c$ を因数分解するには、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 α, β を求めて、 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ とすればよい。
(2) では x^2 の係数 $a=2$ を忘れないようにする。

解答 (1) 2 次方程式 $x^2 - 3x - 2 = 0$ の解は

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{よって } x^2 - 3x - 2 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right) \quad \text{答}$$

(2) 2 次方程式 $2x^2 - 2x - 3 = 0$ の解は

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 2(-3)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$\text{よって } 2x^2 - 2x - 3 = 2 \left(x - \frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right) \quad \text{答}$$

(3) 2 次方程式 $x^2 + 4x + 6 = 0$ の解は

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot 6}}{1} = -2 \pm \sqrt{-2} = -2 \pm \sqrt{2}i$$

$$\begin{aligned} \text{よって } x^2 + 4x + 6 &= \{x - (-2 + \sqrt{2}i)\} \{x - (-2 - \sqrt{2}i)\} \\ &= (x + 2 - \sqrt{2}i)(x + 2 + \sqrt{2}i) \quad \text{答} \end{aligned}$$

C 2 次方程式の決定

教 p.51

練習
17

次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1) $2, -1$ (2) $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$ (3) $1 + 2i, 1 - 2i$

指針 2 次方程式の決定 2 数 α, β を解とする 2 次方程式の 1 つは、
 $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ である。つまり、 $x^2 - (\text{解の和})x + (\text{解の積}) = 0$ となる。

解答 (1) 解の和は $2 + (-1) = 1$ 解の積は $2(-1) = -2$

よって、この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{答}$$

(2) 解の和は $(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$ 解の積は $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$

よって、この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{答}$$

2
章

複素数と方程式

$$(3) \text{ 解の和は } (1+2i)+(1-2i)=2$$

$$\begin{aligned} \text{解の積は } (1+2i)(1-2i) &= 1^2 - 4i^2 \\ &= 1 - 4(-1) = 5 \end{aligned}$$

よって、この2数を解とする2次方程式の1つは

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \text{答}$$

注意 たとえば、(1)を例にとると、「1つ作れ」という設問であるから、(1)の答えである「 $x^2 - x - 2 = 0$ 」の両辺を何倍かした $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$, ……などを答えても間違いではない。しかし、本問のような問題では、方程式の係数を、最大公約数が1である整数の組にしておくのが普通である。

練習
18

和と積が次のようになる2数を求めよ。

(1) 和が -2 , 積が 6

(2) 和と積がともに 3

指針 和が p , 積が q となる2数 和が p , 積が q である2数は、2次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の解である。

解答 (1) 求める2数は、次の2次方程式の解である。

$$x^2 - (-2)x + 6 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2x + 6 = 0$$

これを解いて

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot 6}}{1} = -1 \pm \sqrt{5}i$$

よって、求める2数は $-1 + \sqrt{5}i$, $-1 - \sqrt{5}i$ **答**

(2) 求める2数は、次の2次方程式の解である。

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

これを解いて

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

よって、求める2数は $\frac{3 + \sqrt{3}i}{2}$, $\frac{3 - \sqrt{3}i}{2}$ **答**

練習
19

2次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の2つの解を α , β とすると、次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ。

(1) $1 - \alpha$, $1 - \beta$

(2) α^2 , β^2

指針 2次方程式の解と方程式の決定 次の手順で解けばよい。

① 解と係数の関係から、 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ の値をそれぞれ求める。

② 和と積が α , β の式で表されるから、①を利用して、それらの和と積をそれぞれ求め、2次方程式 $x^2 - (\text{和})x + (\text{積}) = 0$ を作る。

教 p.52

解答 解と係数の関係から $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -1 \dots\dots \textcircled{1}$

$$(1) \textcircled{1} \text{より} \quad (1-\alpha) + (1-\beta) = 2 - (\alpha + \beta) = 2 - 3 = -1$$

$$(1-\alpha)(1-\beta) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = -1 - 3 + 1 = -3$$

よって、 $1-\alpha, 1-\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - (-1)x + (-3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + x - 3 = 0 \quad \text{答}$$

$$(2) \textcircled{1} \text{より} \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \cdot (-1) = 11$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (-1)^2 = 1$$

よって、 α^2, β^2 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - 11x + 1 = 0 \quad \text{答}$$

D 2 次方程式の実数解の符号

教 p.53

練習
20

2 次方程式 $x^2 + 2(m-3)x + 4m = 0$ が、次のような解をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる 2 つの正の解

(2) 異なる 2 つの負の解

(3) 正の解と負の解

指針 2 次方程式の実数解の符号 2 次方程式の判別式を D 、解を α, β として、方程式がそれぞれ (1)~(3) のような解をもつときの条件を D, α, β で表すと

$$(1) \text{ 異なる 2 つの正の解} \iff D > 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$$

$$(2) \text{ 異なる 2 つの負の解} \iff D > 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$$

$$(3) \text{ 正の解と負の解} \iff \alpha\beta < 0$$

解と係数の関係を使って、(1)~(3) の場合について、条件を m についての不等式で表し、それらとともに満たす m の値の範囲を求める。

解答 この 2 次方程式の 2 つの解を α, β とし、判別式を D とする。

$$\text{ここで} \quad \frac{D}{4} = (m-3)^2 - 1 \cdot 4m = m^2 - 10m + 9$$

$$= (m-1)(m-9)$$

また、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2(m-3), \alpha\beta = 4m$$

(1) 方程式が条件を満たすのは、次の ①, ② が成り立つときである。

$$D > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha + \beta > 0 \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から} \quad (m-1)(m-9) > 0$$

$$\text{よって} \quad m < 1, 9 < m \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

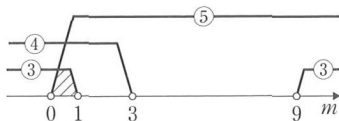
$$\textcircled{2} \text{ から} \quad -2(m-3) > 0 \quad \text{かつ} \quad 4m > 0$$

よって $m < 3$ …… ④

$m > 0$ …… ⑤

③, ④, ⑤の共通範囲を求めて

$0 < m < 1$ 答



(2) 方程式が条件を満たすのは、次の①, ②が成り立つときである。

$D > 0$ …… ①

$\alpha + \beta < 0$ かつ $\alpha\beta > 0$ …… ②

①から $(m-1)(m-9) > 0$

よって $m < 1, 9 < m$ …… ③

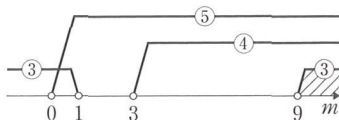
②から $-2(m-3) < 0$ かつ $4m > 0$

よって $m > 3$ …… ④

$m > 0$ …… ⑤

③, ④, ⑤の共通範囲を求めて

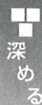
$m > 9$ 答



(3) 方程式が条件を満たすのは、 $\alpha\beta < 0$ のときである。

よって $4m < 0$

したがって $m < 0$ 答



深める

教 p.53

教科書の応用問題2において、条件 $D > 0$ がないと「2次方程式が異なる2つの正の解をもつ」という条件を満たさないことを、例をあげて示してみよう。

指針 2次方程式の実数解の符号 応用例題2において、

$D > 0 \iff m < -3, 2 < m$ である。したがって、 $m > 0$ かつ $m < 6$ かつ

$-3 \leq m \leq 2$ を満たすいずれかの値に対し、方程式 $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$ が条件を満たさないことを示せばよい。

解答 (例) $D > 0$ でないとき、すなわち、 $D \leq 0$ のとき、 $-3 \leq m \leq 2$ である。

そこで、 $m > 0$ かつ $m < 6$ かつ $-3 \leq m \leq 2$ を満たす値として、たとえば、 $m = 1$ とする。

このとき、与えられた2次方程式は $x^2 - 2x + 5 = 0$ となり、その解は $x = 1 \pm 2i$ で、実数解でないから、「正の解をもつ」という条件を満たさない。

注意 $-3 < m < 2$ のときは、 $D < 0$ であり、解は虚数となるから、そもそも解の符号は考えられない。また、 $m = -3, 2$ のときは実数解をもつが、その解は重解であり、「異なる2つの解をもつ」という条件を満たさない。

コラム 2 次方程式と 2 次関数のグラフ

教 p.54

確認

問題 2 次関数 $y=x^2-2mx-m+6$ のグラフと x 軸の正の部分が、異なる 2 点で交わるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

上の問題のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わることと、教科書の応用例題 2 の 2 次方程式が異なる 2 つの正の解をもつことは、同じことであることを確認しよう。

指針 2 次方程式と 2 次関数のグラフ グラフと x 軸の共有点の x 座標は方程式の実数解であることを述べればよい。

解答 2 次関数 $y=x^2-2mx-m+6$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ の実数解である。

よって、この問題のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わることと、応用例題 2 の 2 次方程式が異なる 2 つの正の解をもつことは同じことである。

終

教 p.54

発見

2 次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ の 2 つの解を α , β とすると、2 次関数 $y=x^2-2mx-m+6$ は $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ と表されます。ここで、 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフと x 軸の正の部分が、異なる 2 点で交わるとして、[1], [2], [3] が成り立つための条件を考えよう。このとき、どのようなことがいえるだろうか。

指針 2 次方程式と 2 次関数のグラフ 2 次関数 $y=x^2-2mx-m+6$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

[2] グラフの軸が y 軸の右側にある。

[3] グラフと y 軸の交点の y 座標が正である。

また、2 次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ の解を α , β , 判別式を D とすると、この方程式が異なる 2 つの正の解をもつのは、次の ①, ②, ③ が同時に成り立つときである。

① $D>0$ ② $\alpha+\beta>0$ ③ $\alpha\beta>0$

前問での考察から、[1], [2], [3] と ①, ②, ③ が同じであることを示すのが目標になる。

2 章

複素数と方程式

解答 (例) $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$ …… ① とする。

また、①の2つの解を α, β とすると、 $y = x^2 - 2mx - m + 6$ …… ②は
 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ と表され、 $y = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ …… ③となる。

2次関数③のグラフと x 軸の正の部分が異なる2点で交わるとき、[1], [2], [3]が同時に成り立つ。

[1] $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ すなわち、①が異なる2つの実数解をもつ条件であるから、 $D > 0$ である。

[2] ③より、軸の方程式は $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ であるから

$$\frac{\alpha + \beta}{2} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \alpha + \beta > 0$$

[3] ③より、 y 軸との交点の y 座標は $\alpha\beta$ であるから $\alpha\beta > 0$

以上により、2次関数③のグラフと x 軸の正の部分が異なる2点で交わるための条件[1], [2], [3]と、2次方程式①が異なる2つの正の解をもつための条件①, ②, ③は同じであることがわかる。 **終**

まとめ

教 p.54

教科書の練習20を2次関数のグラフを利用して解いてみよう。

指針 2次方程式と2次関数のグラフ 2次方程式の解の条件を、2次関数のグラフと x 軸との共有点の条件におき換えて考える。実質的に、数学Iでの学習の復習問題である。判別式 D の値、軸の位置、 y 軸との交点の y 座標に着目して考える。

解答 2次方程式 $x^2 + 2(m - 3)x + 4m = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (m - 3)^2 - 1 \cdot 4m = m^2 - 10m + 9 = (m - 1)(m - 9)$$

ここで、2次関数 $y = x^2 + 2(m - 3)x + 4m$ …… ①のグラフを考えると、①は下に凸の放物線で、軸は直線 $x = -(m - 3)$ 、 y 軸との交点の y 座標は $4m$ である。

(1) 条件は、①が x 軸の正の部分と異なる2点で交わることに同じである。

$D > 0$ から $m < 1, 9 < m$ …… ②

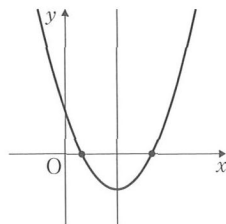
軸が y 軸の右側にあるから

$-(m - 3) > 0$ より $m < 3$ …… ③

y 軸との交点の y 座標が正であるから

$4m > 0$ より $m > 0$ …… ④

②, ③, ④の共通範囲を求めて $0 < m < 1$ **答**



- (2) 条件は、①が x 軸の負の部分と異なる2点で交わることと同じである。

$$D>0 \text{ より } m<1, 9<m \cdots \cdots \textcircled{5}$$

軸が y 軸の左側にあるから、

$$-(m-3)<0 \text{ より } m>3 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

y 軸との交点の y 座標が正であるから、

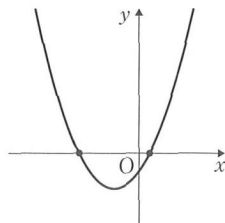
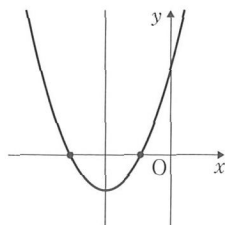
$$4m>0 \text{ より } m>0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6}, \textcircled{7} \text{ の共通範囲を求めて } m>9 \text{ 答}$$

- (3) 条件は、①が x 軸の正の部分、負の部分それぞれと交わることと同じである。

y 軸との交点の y 座標が負であればよいから、

$$4m<0 \text{ より } m<0 \text{ 答}$$



2章

複素数と方程式

第2章 第1節

問題

教 p.55

- 1 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

$$(1) (x-3y) + (2x+y)i = 1-12i$$

$$(2) (5+i)(x+yi) = 13+13i$$

指針 複素数の相等 「 $a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$ 」の関係を用いて、 x, y についての連立方程式を作る。

解答 (1) $x-3y, 2x+y$ はそれぞれ実数であるから

$$x-3y=1 \cdots \cdots \textcircled{1} \quad 2x+y=-12 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を連立方程式として解くと } x=-5, y=-2 \text{ 答}$$

$$(2) \text{ 左辺} = (5+i)(x+yi) = 5x + (x+5y)i + yi^2$$

$$= (5x-y) + (x+5y)i$$

よって、 $(5x-y) + (x+5y)i = 13+13i$ のとき、

$5x-y, x+5y$ はそれぞれ実数であるから

$$5x-y=13 \cdots \cdots \textcircled{1} \quad x+5y=13 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を連立方程式として解くと } x=3, y=2 \text{ 答}$$

教 p.55

- 2 次の式を計算せよ。

$$(1) \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \right)^2$$

$$(2) i + \frac{1}{i}$$

$$(3) i + i^2 + i^3 + i^4$$

指針 複素数の計算

- (1) 展開して, i^2 は -1 で置き換える。
 (2) 分数は分母を実数にする。分母, 分子に i を掛ける。
 (3) $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

解答 (1) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{2^2} = \frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$
 $= \frac{1-2\sqrt{3}i+3(-1)}{4} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 答

(2) $i + \frac{1}{i} = i + \frac{i}{i^2} = i + \frac{i}{-1} = i - i = 0$ 答

(3) $i + i^2 + i^3 + i^4 = i + i^2 + i^2 i + (i^2)^2$
 $= i - 1 + (-1)i + (-1)^2 = 0$ 答

教 p.55

3 次の2次方程式を解け。

(1) $2x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

(2) $2(x+1)^2 - 4(x+1) + 3 = 0$

指針 2次方程式の解の公式

- (1) 解の公式にあてはめる。 $\sqrt{\quad}$ の中が負の数になるときは, i を使って表す。
 (2) $x+1=X$ とおき, まず X の値を求めてもよいが, 左辺を整理すると1次の項が消えて解きやすくなる。

解答 (1) $x = \frac{-(-\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$
 $= \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-3}}{4} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{3}i}{4}$ 答

(2) 左辺のかっこをはずすと $2x^2 + 4x + 2 - 4x - 4 + 3 = 0$

整理して $2x^2 + 1 = 0$ すなわち $x^2 = -\frac{1}{2}$

よって $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} i = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$ 答

別解 (2) $x+1=X$ とおくと $2X^2 - 4X + 3 = 0$

ゆえに $X = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$

よって $x+1 = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$

したがって $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$ 答

- 4 2次方程式 $2x^2+4x+3=0$ の2つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 \quad (2) \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \quad (3) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$$

指針 解と係数の関係 (1)~(3)の各式は、 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ を使った式で表される。解と係数の関係から $\alpha+\beta, \alpha\beta$ の値を求め、代入する。

解答 解と係数の関係から $\alpha+\beta = -\frac{4}{2} = -2, \alpha\beta = \frac{3}{2}$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ = (-2)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1 \quad \text{答}$$

$$(2) \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) \\ = \frac{3}{2}(-2) = -3 \quad \text{答}$$

$$(3) (1) \text{ から } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ = 1 \div \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{答}$$

- 5 2次方程式 $x^2-7x-1=0$ の2つの解を α, β とするとき、次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ。

$$(1) \alpha-2, \beta-2 \quad (2) \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta} \quad (3) \alpha+\beta, \alpha\beta$$

指針 2次方程式の解と方程式の作成 次の手順で作ればよい。

- ① 解と係数の関係より、 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ の値を求める。
② 2数の和と積をそれぞれ α, β の式で表し、①を利用して、それらの和と積の値を計算し、2次方程式 $x^2 - (2数の和)x + (2数の積) = 0$ を作る。

解答 α, β は2次方程式 $x^2-7x-1=0$ の解であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = -1 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$(1) \text{ ① から } (\alpha-2) + (\beta-2) = (\alpha+\beta) - 4 \\ = 7 - 4 = 3 \\ (\alpha-2)(\beta-2) = \alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4 \\ = -1 - 2 \cdot 7 + 4 = -11$$

$$\text{よって } x^2 - 3x - 11 = 0 \quad \text{答}$$

$$(2) \text{ ①より } \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\beta}{\alpha\beta} + \frac{2\alpha}{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{2 \cdot 7}{-1} = -14$$

$$\frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{-1} = -4$$

よって $x^2 - (-14)x - 4 = 0$ すなわち $x^2 + 14x - 4 = 0$ 答

$$(3) \text{ ①より } (\alpha+\beta) + \alpha\beta = 7-1=6$$

$$(\alpha+\beta)\alpha\beta = 7(-1) = -7$$

よって $x^2 - 6x - 7 = 0$ 答

教 p.55

6 次の①～④の等式が成り立つかどうか答えよ。また、成り立たないものは、右辺を直して正しい等式にせよ。

$$\text{① } \sqrt{-3}\sqrt{-5} = \sqrt{15}$$

$$\text{② } \sqrt{2}\sqrt{-7} = \sqrt{-14}$$

$$\text{③ } \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{-2}{5}}$$

$$\text{④ } \frac{1}{\sqrt{-3}} = \sqrt{-\frac{1}{3}}$$

指針 負の数の平方根の計算 $a > 0, b > 0$ でないとき、 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ や

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ は成り立つとは限らないから、たとえば、

$\sqrt{-3}\sqrt{-5} = \sqrt{(-3)(-5)}$ のように計算してはいけない。負の数の平方根の計算をするときは、まず最初に、 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ ($a > 0$) の計算を行う。

解答 ① 成り立たない。

$$\sqrt{-3}\sqrt{-5} = \sqrt{3}i\sqrt{5}i = -\sqrt{15} \quad \text{終}$$

② 成り立つ。 答

③ 成り立つ。 答

④ 成り立たない。

$$\frac{1}{\sqrt{-3}} = \frac{1}{\sqrt{3}i} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i = -\sqrt{\frac{1}{3}}i = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{-\frac{1}{3}} \quad \text{終}$$

補足 ② $\sqrt{2}\sqrt{-7} = \sqrt{2}\sqrt{7}i = \sqrt{14}i, \sqrt{-14} = \sqrt{14}i$ から、成り立つ。

$$\text{③ } \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}i, \sqrt{\frac{-2}{5}} = \sqrt{-\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}i \text{ から、成り立つ。}$$

第2節 高次方程式

4 剰余の定理と因数定理

2章

複素数と方程式

まとめ

1 剰余の定理

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割った余りは、 $P(k)$ に等しい。

解説 $P(x)$ を $x-k$ で割った商が $Q(x)$ 、余りが R であることは

$$P(x) = (x-k)Q(x) + R \quad \leftarrow R \text{ は定数である。}$$

と表され、両辺の x に k を代入すると、 $P(k)=R$ が得られる。

2 因数定理

多項式 $P(x)$ が 1 次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff P(k)=0$

解説 剰余の定理により

$$P(x) \text{ が } 1 \text{ 次式 } x-k \text{ で割り切れる} \iff P(k)=0$$

$$\text{よって、} P(k)=0 \text{ のとき } P(x) = (x-k)Q(x) \quad \leftarrow \text{余り } 0$$

すなわち、 $P(x)$ は $x-k$ を因数にもつ。

A 剰余の定理

教 p.56

練習
21

$P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$ を次の 1 次式で割った余りを求めよ。

- (1) $x-1$ (2) $x+1$ (3) $x+2$

指針 1 次式で割った余り 1 次式で割った余りを求めるとき、実際に割り算をするより剰余の定理を用いる方が簡単に求められる。

- (1) $P(x)$ を $x-k$ で割った余りは $P(k)$ に等しいから、 $x-1$ で割った余りは、 $P(1)$ すなわち $P(x)$ の x に 1 を代入して計算した値である。代入する x の値は、(割る 1 次式) $=0$ の解と考えるとよい。

- (2) $P(-1)$ (3) $P(-2)$ をそれぞれ計算する。

解答 (1) $P(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = -3$ 答

(2) $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) - 2 = 1$ 答

(3) $P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) - 2 = 0$ 答

教 p.56

練習
22

次のことを示せ。

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割った余りは、 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ に等しい。

指針 1 次式で割った余り $P(x)=(ax+b)Q(x)+R$ とおき, $ax+b=0$ の解

$x=-\frac{b}{a}$ を代入する。

解答 $P(x)$ を x の 1 次式 $ax+b$ で割った商を $Q(x)$, 余りを R とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$$

この両辺の x に $-\frac{b}{a}$ を代入すると

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{b}{a}\right) &= \left\{a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right\}Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \\ &= 0 \cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R=R \end{aligned}$$

よって, 多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割った余りは, $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ に等しい。終

練習
23

多項式 $P(x)=2x^3+5ax^2+ax+1$ を $x+1$ で割った余りが -5 であるとき, 定数 a の値を求めよ。

指針 剰余の定理の利用 $P(x)$ を $x+1$ で割った余りは $P(-1)$ に等しい。

よって, $P(-1)=-5$ を解き, a の値を求める。

解答 剰余の定理により $P(-1)=-5$ であるから

$$2(-1)^3+5a(-1)^2+a(-1)+1=-5$$

整理すると $4a=-4$

よって $a=-1$ 答

教 p.57

練習
24

多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割った余りが 1, $x+1$ で割った余りが 5 である。 $P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを求めよ。

指針 2 次式で割った余り $P(x)$ を 2 次式 $(x-3)(x+1)$ で割った商を $Q(x)$ とすると, 余りは 1 次式か定数であるから

$$P(x)=(x-3)(x+1)Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $P(x)$ を $x-3$, $x+1$ で割った余りはそれぞれ $P(3)$, $P(-1)$ に等しいから, $P(3)=1$, $P(-1)=5$ が成り立つ。したがって, ① に $x=3$, $x=-1$ を代入すれば, a , b についての連立方程式ができる。

解答 $P(x)$ を 2 次式 $(x-3)(x+1)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて, 商を $Q(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-3)(x+1)Q(x)+ax+b$$

$$\leftarrow A=BQ+R$$

この等式より $P(3)=3a+b$, $P(-1)=-a+b$

また、 $x-3$ で割った余りが 1 であるから $P(3)=1$

$x+1$ で割った余りが 5 であるから $P(-1)=5$

よって $3a+b=1, \quad -a+b=5$

これを解くと $a=-1, b=4$

したがって、求める余りは $-x+4$ 答

割られる式が具体的な式でなくても、余りが求められるんだね。



B 因数定理

練習
25

教 p.58

次の 1 次式のうち、多項式 x^3+2x^2-5x-6 の因数であるものはどれか。

- ① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$

指針 因数定理 $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とおくと

整数 $P(x)$ が 1 次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff P(k)=0$

①~④のうち、 $P(k)=0$ となるものを選ぶ。

解答 $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とおく。

① $P(1)=1^3+2\cdot 1^2-5\cdot 1-6=-8$

② $P(-1)=(-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6=0$

③ $P(2)=2^3+2\cdot 2^2-5\cdot 2-6=0$

④ $P(-2)=(-2)^3+2(-2)^2-5(-2)-6=4$

よって、 $P(x)$ の因数であるものは ②, ③ 答

練習
26

教 p.58

次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-3x^2-6x+8

(2) x^3-5x^2+3x+9

(3) $2x^3+3x^2-11x-6$

指針 3 次式の因数分解 まず 3 次式 $P(x)$ に対し、 $P(k)=0$ となる k の値をみつかる。 $P(x)$ の定数項の正・負の約数の中から探すとよい。

次に、 $P(x)$ を $x-k$ で割り、商 $Q(x)$ (2 次式) を求め、 $P(x)=(x-k)Q(x)$ とする。 $Q(x)$ が因数分解できる場合はさらに因数分解しておく。

解答 (1) $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$ とすると

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x^2-2x-8)$$

さらに因数分解して

$$x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x+2)(x-4) \quad \text{答}$$

- (2) $P(x)=x^3-5x^2+3x+9$ とすると

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$x^3-5x^2+3x+9=(x+1)(x^2-6x+9)$$

さらに因数分解して

$$x^3-5x^2+3x+9=(x+1)(x-3)^2 \quad \text{答}$$

- (3) $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$ とすると

$$\begin{aligned} P(2) &= 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(2x^2+7x+3)$$

さらに因数分解して

$$2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(x+3)(2x+1) \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x-8 \\ x-1 \overline{) x^3-3x^2-6x+8} \\ \underline{x^3-x^2} \\ -2x^2-6x \\ \underline{-2x^2+2x} \\ -8x+8 \\ \underline{-8x+8} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2-6x+9 \\ x+1 \overline{) x^3-5x^2+3x+9} \\ \underline{x^3+x^2} \\ -6x^2+3x \\ \underline{-6x^2-6x} \\ 9x+9 \\ \underline{9x+9} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2+7x+3 \\ x-2 \overline{) 2x^3+3x^2-11x-6} \\ \underline{2x^3-4x^2} \\ 7x^2-11x \\ \underline{7x^2-14x} \\ 3x-6 \\ \underline{3x-6} \\ 0 \end{array}$$

研究 組立除法

まとめ

1 組立除法

たとえば、3 次式 ax^3+bx^2+cx+d を 1 次式 $x-k$ で割った商を lx^2+mx+n とし、余りを R とする。

この商の係数 l, m, n と余り R は、次のような方法でも求められる。この方法を 組立除法 という。

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & d & & | & k \\ & \times k & \rightarrow & lk & \times k & \rightarrow & mk & \times k & \rightarrow & nk \\ \hline l & & m & & n & & R & & & \\ l=a, & m=b+lk, & n=c+mk, & R=d+nk \end{array}$$

練習
1

x^3-4x^2+3 を $x-1$ で割った商と余りを求めよ。

教 p.59

指針 組立除法 割られる式 x^3-4x^2+3 は x の項がないから、その項の係数を 0 として、 x^3-4x^2+0x+3 と考える。

解答 組立除法により

$$\text{商 } x^2-3x-3 \quad \text{余り } 0 \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad 0 \quad 3 \quad | \quad 1 \\ \quad 1 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 1 \quad -3 \quad -3 \quad | \quad 0 \end{array}$$

5 高次方程式

まとめ

1 高次方程式

x の多項式 $P(x)$ が n 次式のとき、方程式 $P(x)=0$ を x の n 次方程式という。また、3 次以上の方程式を 高次方程式 という。

2 3乗根

3 乗すると a になる数を a の 3 乗根 という。すなわち、 $x^3=a$ となる x が a の 3 乗根である。

3 1の3乗根 ω

1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω とすると、1 の 3 乗根は、1, ω , ω^2 と表される。また、 $\omega^2+\omega+1=0$ が成り立つ。

4 2重解, 3重解

たとえば、方程式 $(x-1)^2(x+2)=0$ の解 $x=1$ を、この方程式の 2 重解 という。また、方程式 $(x-1)^3(x+2)=0$ の解 $x=1$ を、この方程式の 3 重解 という。

A 高次方程式の解き方(1)

教 p.60

練習
27

次の 3 次方程式を解け。

$$(1) \quad x^3-8=0$$

$$(2) \quad x^3+1=0$$

指針 因数分解を利用する解き方 次の因数分解の公式を利用する。

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

解答 (1) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

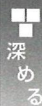
$$\text{よって} \quad x-2=0 \quad \text{または} \quad x^2+2x+4=0$$

$$\text{したがって} \quad x=2, \quad -1 \pm \sqrt{3}i \quad \text{答}$$

(2) 左辺を因数分解すると $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$$\text{よって} \quad x+1=0 \quad \text{または} \quad x^2-x+1=0$$

$$\text{したがって} \quad x=-1, \quad \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad \text{答}$$



$(\omega^2)^3$ の値を求めてみよう。

教 p.60

指針 1の3乗根 ω 1の3乗根のうち虚数であるものの1つを ω とすると、 ω^2 もまた1の3乗根であることを利用する。

解答 ω^2 は1の3乗根であるから $(\omega^2)^3=1$ **答**

別解 $\omega^3=1$ であるから $(\omega^2)^3=(\omega^3)^2=1^2=1$ **答**

練習 28

次の4次方程式を解け。

(1) $x^4+x^2-20=0$

(2) $x^4-1=0$

教 p.61

指針 因数分解を利用する解き方 $x^2=A$ と考え、2次式の因数分解と同じ要領で左辺を因数分解する。

解答 (1) 左辺を因数分解すると

$$(x^2-4)(x^2+5)=0$$

ゆえに $x^2-4=0$ または $x^2+5=0$

よって $x^2=4$ または $x^2=-5$

したがって $x=\pm 2, \pm\sqrt{5}i$ **答**

$$\leftarrow (x^2)^2+x^2-20=0$$

$$x^2=A \text{ とおくと}$$

$$A^2+A-20=0$$

$$(A-4)(A+5)=0$$

(2) 左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x-1)(x^2+1)=0$$

よって $x+1=0$ または $x-1=0$

または $x^2+1=0$

したがって $x=\pm 1, \pm i$ **答**

$$\leftarrow (x^2)^2-1=0$$

$$(x^2-1)(x^2+1)=0$$

$$\leftarrow x^2=-1$$

$$x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

B 高次方程式の解き方(2)

教 p.61

練習 29

次の3次方程式を解け。

(1) $x^3+4x^2+x-6=0$

(2) $x^3+4x^2+5x+2=0$

(3) $x^3-3x^2+2=0$

(4) $2x^3-3x^2-4=0$

指針 因数定理を用いる解き方 因数定理を用いて左辺を因数分解する。

多項式 $P(x)$ が1次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff P(k)=0$

$P(k)=0$ となる k は、 $P(x)$ の定数項の正・負の約数の中から探すとよい。

なお、 $P(x)$ を $x-k$ で割り算する場合、ここでは p.74 で示した組立除法を使うことにする。

解答 (1) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ とすると

$$P(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^2+5x+6) \\ &= (x-1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

$$P(x)=0 \text{ から } x=-3, -2, 1 \quad \text{答}$$

(2) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ とすると

$$P(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x^2+3x+2) \\ &= (x+1)^2(x+2) \end{aligned}$$

$$P(x)=0 \text{ から } x=-2, -1 \quad \text{答}$$

(3) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ とすると

$$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$P(x) = (x-1)(x^2-2x-2)$$

$$P(x)=0 \text{ から}$$

$$x-1=0 \text{ または } x^2-2x-2=0$$

$$\text{したがって } x=1, 1 \pm \sqrt{3} \quad \text{答}$$

(4) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$ とすると

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x-2$ を因数にもち

$$P(x) = (x-2)(2x^2+x+2)$$

$$P(x)=0 \text{ から}$$

$$x-2=0 \text{ または } 2x^2+x+2=0$$

$$\text{したがって } x=2, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4} \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 4 & 1 & -6 & | & 1 \\ & 1 & 5 & 6 & & \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 4 & 5 & 2 & | & -1 \\ & -1 & -3 & -2 & & \\ \hline 1 & 3 & 2 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -3 & 0 & 2 & | & 1 \\ & 1 & -2 & -2 & & \\ \hline 1 & -2 & -2 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 0 & -4 & | & 2 \\ & 4 & 2 & 4 & & \\ \hline 2 & 1 & 2 & 0 & & \end{array}$$

練習
30

教 p.62

a, b は実数とする。3 次方程式 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ が $1+i$ を解にもつとき, 定数 a, b の値を求めよ。また, 他の解を求めよ。

指針 高次方程式と虚数解

$$\text{方程式 } P(x)=0 \text{ が } \alpha \text{ を解にもつ} \iff P(\alpha)=0$$

すなわち $1+i$ がこの方程式の解であるから, x に $1+i$ を代入すると等式が成り立つ。その左辺を i について整理し, 次のことを使う。

$$a, b \text{ が実数のとき } a+bi=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

解答 $1+i$ がこの方程式の解であるから

$$(1+i)^3 + (1+i)^2 + a(1+i) + b = 0$$

よって $2i - 2 + 2i + a + ai + b = 0$

$$\begin{aligned} \leftarrow (1+i)^2 &= 2i, \\ (1+i)^3 &= 2i - 2 \end{aligned}$$

整理して $(a+b-2) + (a+4)i = 0$

a, b は実数であるから, $a+b-2, a+4$ は実数である。

よって $a+b-2=0, a+4=0$

これを解くと $a=-4, b=6$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -4 & 6 & -3 \\ & -3 & 6 & -6 & \\ \hline 1 & -2 & 2 & 0 & \end{array}$$

このとき, 方程式は $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$

$P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$ とすると

$$P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 4(-3) + 6 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x+3$ を因数にもち

$$P(x) = (x+3)(x^2 - 2x + 2)$$

$P(x)=0$ から $x = -3, 1 \pm i$

答 $a=-4, b=6$, 他の解は $-3, 1-i$

参考 本問において, $1+i$ が解であるとき, 共役な複素数 $1-i$ も解になっている。一般に, 実数係数の n 次方程式の解の1つが虚数 $a+bi$ のとき, 共役な複素数 $a-bi$ も解であることが知られている。

このことを利用した次のような別解も考えられる。

別解 係数が実数の方程式の解の1つが $1+i$ のとき, それと共役な複素数 $1-i$ も解である。

$1 \pm i$ を解にもつ 2 次方程式の1つは $x^2 - 2x + 2 = 0$ であるから, $x^3 + x^2 + ax + b$ は, $x^2 - 2x + 2$ で割り切れる。

割り算を実行すると

商は $x+3$

余りは $(a+4)x + b - 6$

このとき, 余りは0であるから

$$a+4=0, b-6=0$$

よって $a=-4, b=6$ **答**

このとき, 他の解は $1-i$ と, $x+3=0$ から -3 **答**

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2-2x+2 \overline{) x^3 + x^2 + ax + b} \\ \underline{x^3 - 2x^2 + 2x} \\ 3x^2 + (a-2)x + b \\ \underline{3x^2 - 6x + 6} \\ (a+4)x + b - 6 \end{array}$$

発展 3 次方程式の解と係数の関係

まとめ

3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とすると

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

練習
1

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(2) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

指針 3 次方程式の解と係数の関係 p.78 のまとめの公式から

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-3}{1}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{1}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{2}{1}$$

解答 解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \quad \alpha\beta\gamma = -2$$

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1 \\ = -2 + 1 + 3 + 1 = 3 \quad \text{答}$$

2
章

複素数と方程式

第 2 章 第 2 節

問 題

教 p.64

7 $P(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$ を $3x + 1$ で割った余りを求めよ。

指針 1 次式で割った余り 多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax + b$ で割った余りは、

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) \text{ である。}$$

解答 $P(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$ を $3x + 1$ で割った余りは $P\left(-\frac{1}{3}\right)$ であるから

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \quad \text{答}$$

教 p.64

8 $P(x) = x^3 + ax + b$ を $(x+1)(x-3)$ で割った余りが $3x-2$ であるとき、次の問いに答えよ。

(1) $P(-1), P(3)$ を a, b で表せ。

(2) 定数 a, b の値を求めよ。

指針 2 次式で割った余り

(1) $P(x) = x^3 + ax + b$ に $x = -1, 3$ を代入する。

(2) $P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割った商を $Q(x)$ とすると

$P(x) = (x+1)(x-3)Q(x) + 3x-2$ が成り立つ。これの両辺に $x = -1, 3$ を代入して、(1)の結果を用いる。

解答 (1) $P(x)=x^3+ax+b$ であるから

$$P(-1)=(-1)^3+a(-1)+b, \quad P(3)=3^3+a \cdot 3+b$$

$$\text{すなわち } P(-1)=-a+b-1, \quad P(3)=3a+b+27 \quad \text{答}$$

(2) $P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割った余りが $3x-2$ であるから、商を $Q(x)$ とすると $P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+3x-2$

$$\text{ゆえに } P(-1)=3 \cdot (-1)-2=-5, \quad P(3)=3 \cdot 3-2=7$$

よって、(1)の結果から

$$-a+b-1=-5, \quad 3a+b+27=7$$

$$\text{すなわち } -a+b=-4, \quad 3a+b=-20$$

$$\text{これを解くと } a=-4, \quad b=-8 \quad \text{答}$$

教 p.64

9 1の3乗根のうち、虚数であるものの1つを ω とすると、 $\omega^4+\omega^2+1$ の値を求めよ。

指針 1の3乗根 ω 1の3乗根のうち、虚数であるものの1つを ω とすると、次が成り立つ。

$$\omega^3=1 \quad \cdots \cdots \text{①} \quad \omega^2+\omega+1=0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

解答 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$ であるから

$$\omega^4+\omega^2+1=\omega^3 \cdot \omega + \omega^2 + 1 = 1 \cdot \omega + \omega^2 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \text{答}$$

補足 ①が成り立つことは、 ω が1の3乗根であることから明らかである。

また、①より、 $\omega^3-1=0$, $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ であり、

$\omega \neq 1$ であるから、 $\omega^2+\omega+1=0$, つまり、②が成り立つ。

教 p.64

10 次の方程式を解け。

$$(1) \quad x^4+2x^2-24=0$$

$$(2) \quad 2x^3+7x^2+2x-3=0$$

$$(3) \quad x^4-x^3-2x^2+x+1=0$$

指針 高次方程式の解き方 (2), (3)は因数定理を利用する。

解答 (1) 左辺を因数分解すると $(x^2-4)(x^2+6)=0$

$$\text{よって } x^2-4=0 \quad \text{または} \quad x^2+6=0$$

$$\text{したがって } x=\pm 2, \pm \sqrt{6}i \quad \text{答}$$

(2) $P(x)=2x^3+7x^2+2x-3$ とすると

$$P(-1)=2 \cdot (-1)^3+7 \cdot (-1)^2+2 \cdot (-1)-3=0$$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$P(x)=(x+1)(2x^2+5x-3)$$

$$=(x+1)(x+3)(2x-1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 7 & 2 & -3 & -1 \\ & -2 & -5 & 3 & \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x)=0 \text{ から } x=-3, -1, \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

$$(3) \quad P(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1 \text{ とすると}$$

$$P(1)=1^4-1^3-2 \cdot 1^2+1+1=0$$

ゆえに, $P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$P(x)=(x-1)(x^3-2x-1)$$

さらに, $Q(x)=x^3-2x-1$ とすると

$$Q(-1)=(-1)^3-2 \cdot (-1)-1=0$$

から $Q(x)=(x+1)(x^2-x-1)$

よって $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-1)$

したがって, $P(x)=0$ から

$$x=\pm 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & -2 & -1 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & -2 & -1 & & -1 \\ & -1 & 1 & 1 & & \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 & & \end{array}$$

2章

複素数と方程式

教 p.64

11 3 次方程式 $x^3-2x^2+ax+b=0$ が 1 と -1 を解にもつとき, 次の問いに答えよ。

(1) 定数 a, b の値を求めよ。 (2) 他の解を求めよ。

指針 高次方程式と解 $P(x)=x^3-2x^2+ax+b$ とする。

(1) 方程式 $P(x)=0$ が α を解にもつ $\iff P(\alpha)=0$

このことを使うと, $P(1)=0, P(-1)=0$ であるから, a と b についての連立方程式が得られる。

(2) 因数定理 $P(x)$ が 1 次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff P(k)=0$

このことを使うと, $P(1)=0, P(-1)=0$ から, $P(x)$ は $(x-1)(x+1)$ を因数にもつ。方程式の左辺を因数分解するのに利用できる。

解答 (1) 1 と -1 がこの方程式の解であるから

$$1^3-2 \cdot 1^2+a \cdot 1+b=0$$

$$(-1)^3-2(-1)^2+a(-1)+b=0$$

$$\text{すなわち} \quad a+b=1, \quad -a+b=3$$

$$\text{これを解くと} \quad a=-1, \quad b=2 \quad \text{答}$$

(2) (1) から, 方程式は

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x+1)(x-2)=0$$

よって $x=\pm 1, 2$

したがって, 他の解は 2 答

$$\begin{array}{rrrr} & x-2 & & \\ x^2-1 & \overline{x^3-2x^2-x+2} & & \\ & x^3 & -x & \\ \hline & -2x^2 & +2 & \\ & -2x^2 & +2 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

- 12 ある立方体から、底面の縦を 1 cm、横を 2 cm それぞれ延ばし、高さを 1 cm 縮めた直方体を作ったら、体積が $\frac{3}{2}$ 倍になった。もとの立方体の 1 辺の長さを求めよ。

指針 高次方程式の応用問題 もとの立方体の 1 辺を x cm とし、直方体の辺の長さを x の式で表して方程式を作る。このとき、「高さを 1 cm 縮めた」ことから、もとの立方体の 1 辺は 1 cm より長いことに注意する。

解答 もとの立方体の 1 辺の長さを x cm とすると、直方体の辺の長さは
縦 $(x+1)$ cm、横 $(x+2)$ cm、高さ $(x-1)$ cm
である。ただし、 $x > 1$ である。

$$\text{問題の条件から} \quad (x+1)(x+2)(x-1) = \frac{3}{2}x^3$$

$$\text{展開して整理すると} \quad x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\text{左辺を因数分解すると} \quad (x-2)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$\text{よって} \quad x = 2, 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x > 1 \text{ であるから} \quad x = 2, 1 + \sqrt{3}$$

したがって、立方体の 1 辺の長さは

$$2 \text{ cm} \quad \text{または} \quad (1 + \sqrt{3}) \text{ cm} \quad \text{答}$$

第2章 章末問題A

教 p.65

2章

複素数と方程式

1. 次の式を計算せよ。

$$(1) (1+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-8}) \quad (2) (1-i)^3 \quad (3) \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-2i}$$

指針 複素数の計算 (1)は、まず負の数の平方根を i を使って表してから計算を始める。(2)では、 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ を利用する。(3)では、それぞれの分数の分母、分子に、分母と共役な複素数を掛けて、分母を実数にする。

解答 (1) $(1+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-8})=(1+\sqrt{2}i)(3-2\sqrt{2}i) \quad \leftarrow \sqrt{-8}=\sqrt{8}i=2\sqrt{2}i$
 $=3+\sqrt{2}i-4i^2$
 $=3+\sqrt{2}i-4(-1)=7+\sqrt{2}i$ 答

(2) $(1-i)^3=1^3-3\cdot 1^2\cdot i+3\cdot 1\cdot i^2-i^3 \quad \leftarrow i^3=i^2\cdot i$
 $=1-3i+3(-1)-(-1)i=-2-2i$ 答

(3) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-2i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}$
 $= \frac{1-i}{2} + \frac{1+2i}{5}$
 $= \frac{5(1-i)}{10} + \frac{2(1+2i)}{10} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$ 答

教 p.65

2. 次の方程式を解け。

$$(1) 8x^3-1=0 \quad (2) 2x^4+x^2-6=0$$

$$(3) x(x+1)(x+2)=2\cdot 3\cdot 4 \quad (4) (x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$$

指針 高次方程式の解き方 (1), (2), (4)は、それぞれ左辺を因数分解する。(1)は公式が利用できる。(2)は $x^2=X$ とみて考える。(4)は $x^2-x=X$ とおく。

(3)は、両辺の形から $x=2$ が1つの解であることがわかる。これは、方程式を整理した後、左辺に因数定理を使うときのヒントとなる。

解答 (1) 左辺を因数分解すると

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)=0 \quad \leftarrow a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

よって $2x-1=0$ または $4x^2+2x+1=0$

したがって $x=\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}$ 答

(2) 左辺を因数分解すると

$$(2x^2-3)(x^2+2)=0$$

よって $2x^2-3=0$ または $x^2+2=0$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & -3 & \longrightarrow -3 \\ 1 & 2 & \longrightarrow 4 \\ \searrow & -6 & \longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\text{したがって } x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, \pm \sqrt{2}i \quad \text{答}$$

$$(3) \text{ 整理して } x^3 + 3x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 24 \text{ とすると}$$

$$P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 24 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x-2$ を因数にもち

$$P(x) = (x-2)(x^2 + 5x + 12)$$

$$P(x) = 0 \text{ から } x-2=0 \text{ または } x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$\text{したがって } x = 2, \frac{-5 \pm \sqrt{23}i}{2} \quad \text{答}$$

$$(4) x^2 - x = X \text{ とおくと, 方程式は } X^2 - 8X + 12 = 0$$

$$\text{左辺を因数分解すると } (X-2)(X-6) = 0$$

$$\text{よって } (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\text{さらに因数分解して } (x+1)(x-2)(x+2)(x-3) = 0$$

$$\text{したがって } x = -2, -1, 2, 3 \quad \text{答}$$

式の形をよく観察して,
どんな方法が最適かを
考えよう。



教 p.65

3. a, b は実数とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ が $2+i$ を解にもつとき, 定数 a, b の値を求めよ。また, 他の解を求めよ。

指針 高次方程式と虚数解 次の2つのことを使う。

$$\text{方程式 } P(x) = 0 \text{ が } \alpha \text{ を解にもつ} \iff P(\alpha) = 0$$

$$a, b \text{ が実数のとき } a+bi=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

解答 $2+i$ が解であるから

$$(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) + 5 = 0$$

$$\text{整理して } (3a+2b+7) + (4a+b+11)i = 0$$

a, b は実数であるから, $3a+2b+7, 4a+b+11$ は実数である。

$$\text{よって } 3a+2b+7=0, 4a+b+11=0$$

$$\text{これを解くと } a = -3, b = 1 \quad \text{答}$$

$$\text{よって, 3 次方程式は } x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$$

$$\text{左辺を因数分解すると } (x+1)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

$$\text{これを解くと } x = -1, 2 \pm i$$

$$\text{したがって, 他の解は } -1, 2-i \quad \text{答}$$

別解 実数係数の方程式であるから、 $2+i$ を解にもてば $2-i$ も解にもつ。

$2+i$, $2-i$ を解とする2次方程式の1つは $x^2-4x+5=0$ であるから、

x^3+ax^2+bx+5 は x^2-4x+5 で割り切れる。

割り算を実行すると、商は $x+(a+4)$

余りは $(4a+b+11)x-5a-15$

余りは0であるから、 $4a+b+11=0$,

$-5a-15=0$ より

$$a=-3, b=1 \quad \text{答}$$

このとき、 $x=2\pm i$ 以外の解は $x+(a+4)=0$

すなわち、 $x+1=0$ の解で $x=-1$

したがって、他の解は $-1, 2-i$ 答

$$\begin{array}{r} x^2-4x+5 \overline{) x^3+ax^2+bx+5} \\ \underline{x^3-4x^2+5x} \\ (a+4)x^2+(b-5)x+5 \\ \underline{(a+4)x^2-4(a+4)x+5(a+4)} \\ (4a+b+11)x-5a-15 \end{array}$$

第2章 章末問題B

教 p.65

4. 2乗して $5+12i$ となる複素数 z は2つある。このような z を求めよ。

指針 複素数の相等，高次方程式 $(a+bi)^2=5+12i$ を満たす実数 a, b を求める。
この等式の左辺を整理し，両辺の実部，虚部がそれぞれ一致することから， a, b についての連立方程式を作る。

解答 $z=a+bi$ (a, b は実数) とおく。

$$z^2=5+12i \text{ であるから } (a+bi)^2=5+12i$$

$$\text{左辺を整理すると } (a^2-b^2)+2abi=5+12i$$

$$a^2-b^2, ab \text{ は実数であるから}$$

$$a^2-b^2=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2ab=12 \quad \text{すなわち} \quad ab=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } b=\frac{6}{a} \ (a \neq 0) \quad \text{これを} \textcircled{1} \text{ に代入して } a^2-\frac{36}{a^2}=5$$

$$\text{両辺に} a^2 \text{ を掛けて整理すると } a^4-5a^2-36=0$$

$$(a^2+4)(a^2-9)=0 \text{ から } (a^2+4)(a+3)(a-3)=0$$

$$a \text{ は実数であるから } a=-3, 3$$

$$a=-3 \text{ のとき, } \textcircled{2} \text{ から } b=-2$$

$$a=3 \text{ のとき, } \textcircled{2} \text{ から } b=2$$

$$\text{したがって } z=3+2i, -3-2i \quad \text{答}$$

教 p.65

5. 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解から，それぞれ1を引いた数を解にもつ2次方程式が $x^2+bx+a=0$ であるという。定数 a, b の値を求めよ。

指針 2次方程式の解と方程式の決定 $x^2+ax+b=0$ の解を α, β とおけば， $x^2+bx+a=0$ の解は $\alpha-1, \beta-1$ と表される。解と係数の関係を用いて，それぞれの方程式において， $\alpha+\beta, \alpha\beta$ と a, b との関係式を求め， $\alpha+\beta, \alpha\beta$ を消去して a, b についての連立方程式を導く。

解答 $x^2+ax+b=0$ の2つの解を α, β とすると

$$\alpha+\beta=-a \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \alpha\beta=b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } x^2+bx+a=0 \text{ の2つの解は} \alpha-1, \beta-1 \text{ と表せるから,}$$

$$(\alpha-1)+(\beta-1)=-b \text{ より } (\alpha+\beta)-2=-b \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)=a \text{ から } \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=a \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ に} \textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ に} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ をそれぞれ代入して整理すると}$$

$$a-b=-2, \quad b+1=0$$

$$\text{これを解いて } a=-3, \quad b=-1 \quad \text{答}$$

6. 2次方程式 $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ が異なる2つの解をもち、その解がともに1より大きいとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

指針 2次方程式の解の存在範囲 2次方程式 $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ の異なる2つの解を α, β とすると、

2つの解 α, β がともに1より大きい $\iff \alpha - 1 > 0$ かつ $\beta - 1 > 0$

$\iff \alpha, \beta$ が実数で、 $(\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0$ かつ $(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$ …… (*)
である。解と係数の関係を利用して、(*)を満たす m の値の範囲を求める。

解答 この2次方程式の2つの解を α, β とし、判別式を D とする。

この2次方程式が、異なる2つの解をもち、その解がともに1より大きいのは、次が成り立つときである。

$$D > 0 \text{ で、} (\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0 \text{ かつ } (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$$

$$\text{ここで } \frac{D}{4} = \{-(m-1)\}^2 - 1 \cdot (m+5) = m^2 - 3m - 4 = (m+1)(m-4)$$

$$D > 0 \text{ から } (m+1)(m-4) > 0$$

$$\text{よって } m < -1, 4 < m \text{ …… ①}$$

$$\text{また、解と係数の関係により } \alpha + \beta = 2(m-1), \alpha\beta = m+5$$

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0 \text{ から } (\alpha + \beta) - 2 > 0$$

$$\text{よって } 2(m-1) - 2 > 0$$

$$\text{これを解くと } m > 2 \text{ …… ②}$$

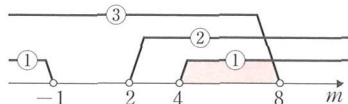
$$(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0 \text{ から}$$

$$\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 > 0$$

$$\text{よって } m + 5 - 2(m-1) + 1 > 0$$

$$\text{これを解くと } m < 8 \text{ …… ③}$$

$$\text{①, ②, ③の共通範囲を求めて } 4 < m < 8 \text{ 答}$$



7. $x = -1 + \sqrt{2}i$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) $x^2 + 2x + 3 = 0$ であることを示せ。

(2) (1)の結果を用いて、 $x^3 + 6x^2 + 8x + 7$ の値を求めよ。

指針 式の値 (2) $x^3 + 6x^2 + 8x + 7$ を $x^2 + 2x + 3$ で割った商を $Q(x)$ 、余りを $R(x)$ とすると $x^3 + 6x^2 + 8x + 7 = (x^2 + 2x + 3)Q(x) + R(x)$

(1)より、 $x = -1 + \sqrt{2}i$ のとき、 $x^2 + 2x + 3 = 0$ であるから、求める値は、 $R(x)$ に $x = -1 + \sqrt{2}i$ を代入した値になる。

解答 (1) $x = -1 + \sqrt{2}i$ から $x + 1 = \sqrt{2}i$

$$\text{両辺を2乗すると } (x+1)^2 = -2$$

$$\text{よって } x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ 終}$$

(2) x^3+6x^2+8x+7 を x^2+2x+3 で割ると、

商 $x+4$, 余り $-3x-5$ であるから

$$\begin{aligned} & x^3+6x^2+8x+7 \\ & = (x^2+2x+3)(x+4) - 3x - 5 \end{aligned}$$

(1)より, $x = -1 + \sqrt{2}i$ のとき、

$x^2+2x+3=0$ であるから, $x = -1 + \sqrt{2}i$ のときの x^3+6x^2+8x+7 の値は
 $-3 \cdot (-1 + \sqrt{2}i) - 5 = -2 - 3\sqrt{2}i$ 答

補足 (1)では, x^2+2x+3 に $x = -1 + \sqrt{2}i$ を代入して計算し, 0 になることを示してもよい。

$$\begin{array}{r} x+4 \\ x^2+2x+3 \overline{) x^3+6x^2+8x+7} \\ \underline{x^3+2x^2+3x} \\ 4x^2+5x+7 \\ \underline{4x^2+8x+12} \\ -3x-5 \end{array}$$

教 p.65

8. a, b は実数の定数とする。3 次方程式 $x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x + b = 0$ の実数解が $x=1$ だけであるとき, a の値の範囲と b の値を求めよ。

指針 **高次方程式と解** $x=1$ を代入すると, a が消え, b の値を求めることができる。これをもとにして, 方程式の左辺を $(x-1)(\quad)$ の形に因数分解する。実数解が $x=1$ だけであるのは, $x=1$ が 3 重解の場合と, 1 以外の解が虚数解となる場合の 2 通りあることに注意する。

解答 $x=1$ がこの方程式の解であるから

$$1^3 + (a-1) \cdot 1^2 + (1-a) \cdot 1 + b = 0$$

整理して $1+b=0$ よって $b=-1$ 答

このとき, 方程式は $x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x - 1 = 0$

左辺は $x-1$ を因数にもつから, 因数分解すると

$$(x-1)(x^2+ax+1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x^2+ax+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ とすると, 方程式 $\textcircled{1}$ の実数解が $x=1$ だけであるとき, 次の [1], [2] の場合が考えられる。

[1] 2 次方程式 $\textcircled{2}$ が重解 $x=1$ をもつ。

$x=1$ は $\textcircled{2}$ の解であるから $1^2 + a \cdot 1 + 1 = 0$

よって $a = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

このとき, $\textcircled{2}$ は $x^2 - 2x + 1 = 0$ となり, 確かに重解 $x=1$ をもつ。

[2] 2 次方程式 $\textcircled{2}$ が実数解をもたない。

$\textcircled{2}$ の判別式を D とすると $D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = (a+2)(a-2)$

実数解をもたないのは $D < 0$ のときであるから

$$(a+2)(a-2) < 0 \quad \text{よって} \quad -2 < a < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

したがって, $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ から $-2 \leq a < 2$ 答

コラム 高次方程式の解の公式

練習

5 次以上の方程式にも解の公式が存在するか調べてみよう。

教 p.66

解答 答 5 次以上の方程式には、その係数に $+$, $-$, $\times$, $\div$ と累乗根を有限回施して得られるような解の公式は存在しない。

参考 5 次以上の一般的な方程式の代数的解法が存在しないことは、ガロア (フランス, 1811~1832), アーベル (ノルウェー, 1802~1829) らによって証明された。

2
章

複素数と方程式